PITAGORAS
ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

FUNCIONES

DOMINIO Y RANGO-FUNCION POLINOMICA-ALGEBRA DE FUNCIONES-FoG –FUNCION INVERSA

FUNCIONES

FUNCIÓN

Sean A y B conjuntos no vacíos. La función f de A en B es un conjunto de pares ordenados $(x;y)$ tal que a $x \in A$ le corresponde un único elemento $y \in B$.

Notación: $f : A \rightarrow B$

$x \rightarrow y = f(x)$

Dominio de f

Esta dada por la variación de x, si esta no se conoce entonces por lo general:

$$\text{Dom } f = A \cap (CVA \text{ de } f(x))$$

Para hallar el CVA consideramos:

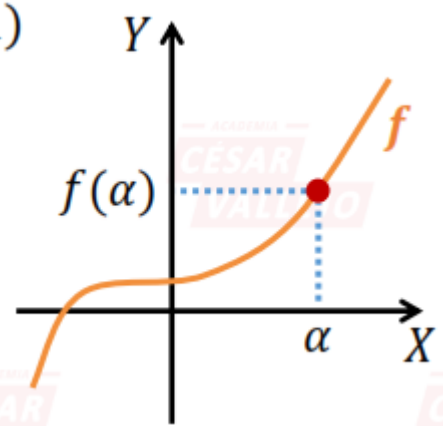
$\sqrt[par]{a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \geq 0$	$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Q_{(x)} \neq 0$

Rango de f

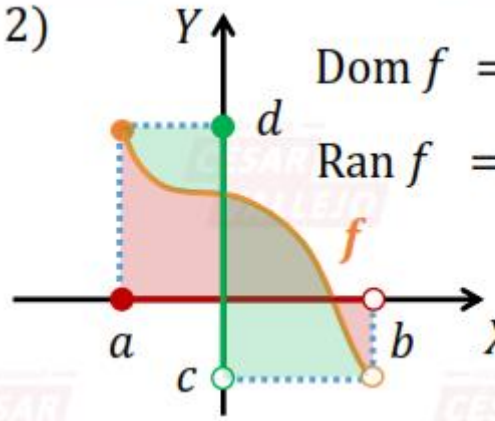
Esta dada por la variación de $f(x)$, y se obtiene a partir del dominio.

GRÁFICA DE FUNCIONES

1)



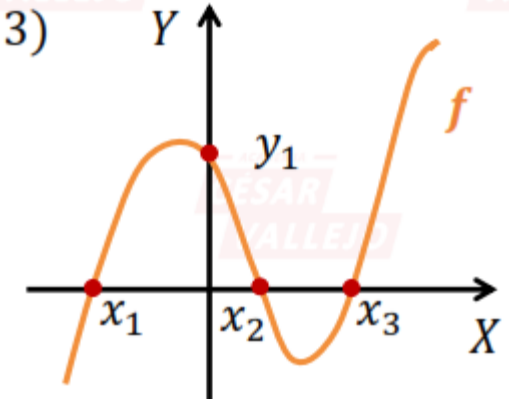
2)



Dom $f = [a;b\rangle$

Ran $f = \langle c;d]$

3)



Corte con el eje Y

$$y_1 = f(0)$$

Corte con el eje X

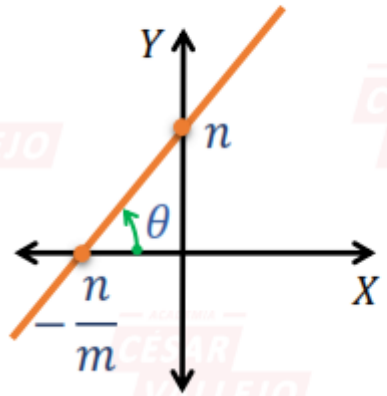
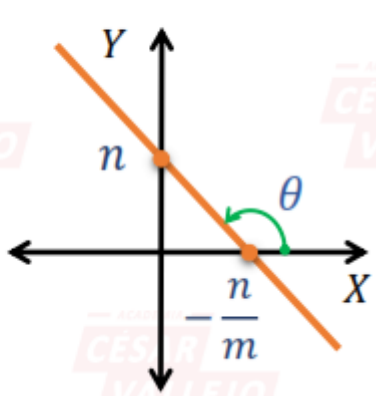
$$f(x) = 0$$

su CS $= \{x_1; x_2; x_3\}$

FUNCIONES

FUNCIÓN LINEAL

$f(x) = mx + n$ $\quad m \neq 0$

$m > 0$	$m < 0$
	

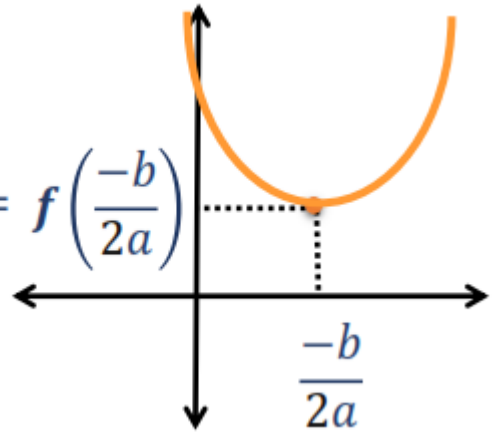
Pendiente $\quad m = tan\,\theta$

FUNCIÓN CUADRÁTICA

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad a \neq 0$

Grafiquemos considerando dos casos:

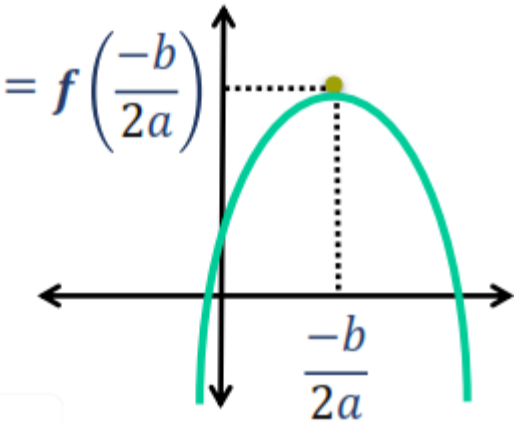
I) $a > 0$ Parábola cóncava hacia arriba



$$Ran f = \left[f\left(\frac{-b}{2a}\right); +\infty \right\rangle$$

FUNCIONES

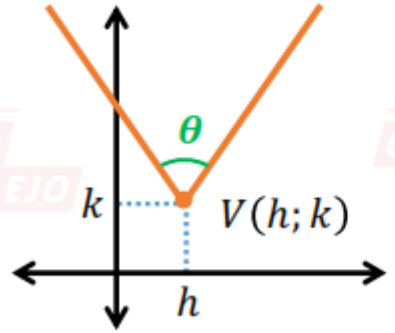
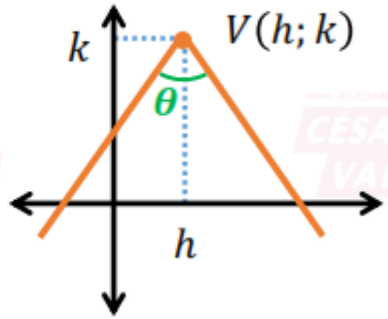
II) $a < 0$ Parábola cóncava hacia abajo



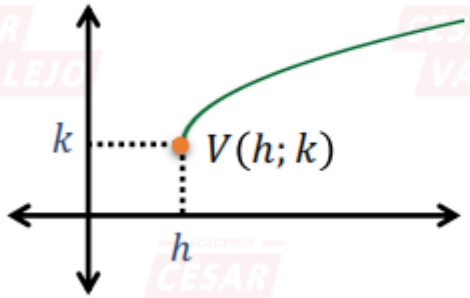
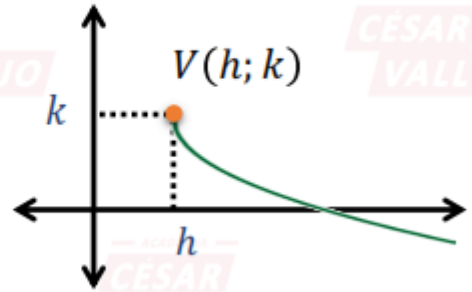
$$\text{Ran}f = \left\langle -\infty; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$$

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO Y RAIZ CUADRADA

$$f(x) = a|x-h| + k \qquad a \neq 0$$

Si $a > 0$	Si $a < 0$
	

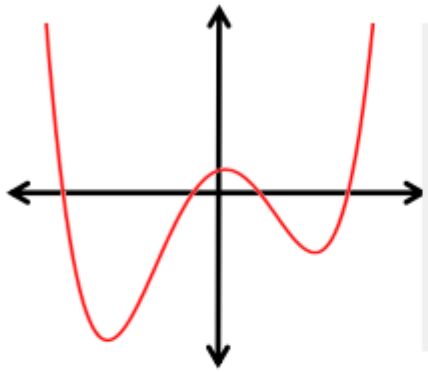
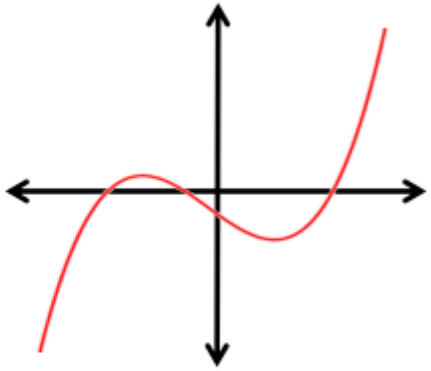
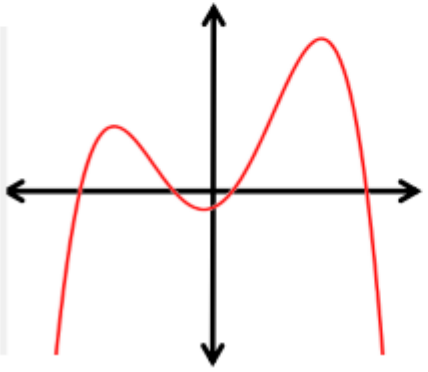
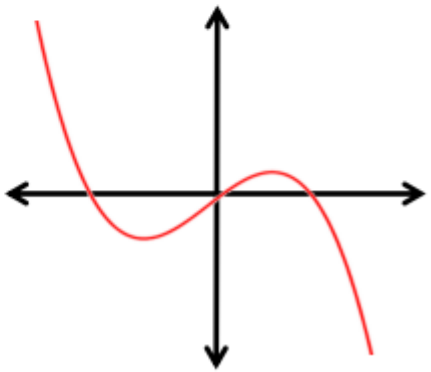
$$f(x) = a\sqrt{x-h} + k \qquad a \neq 0$$

$a > 0$	$a < 0$
	

FUNCIONES

FUNCIÓN POLINOMIAL DE GRADO n

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

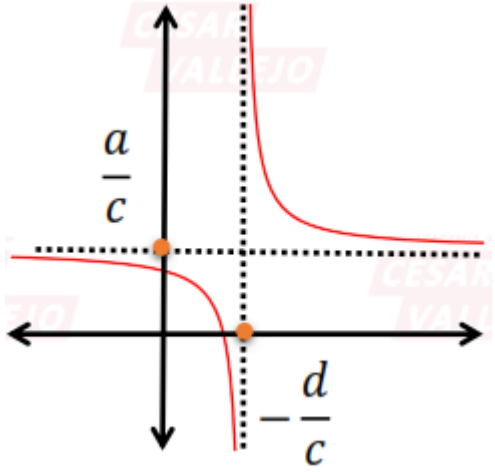
	n es par	n es impar
$a_0 > 0$		
$a_0 < 0$		

FUNCIÓN FRACCIONARIA

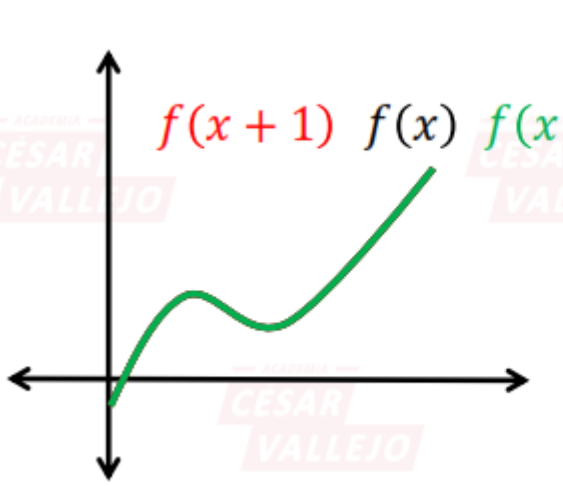
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad c \neq 0$$

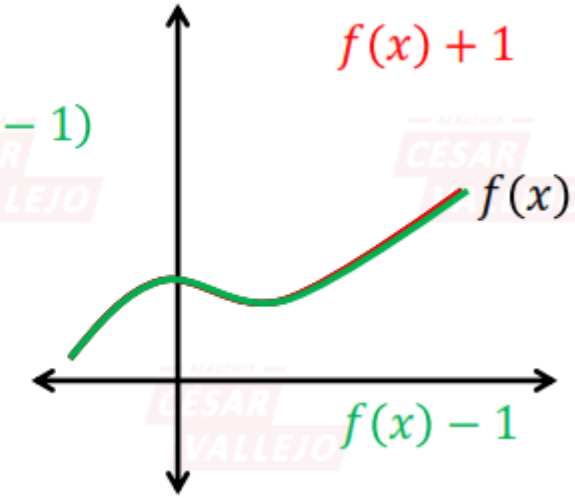
Su gráfica es una hipérbola de asíntotas.

$$y = \frac{a}{c} \qquad x = -\frac{d}{c}$$

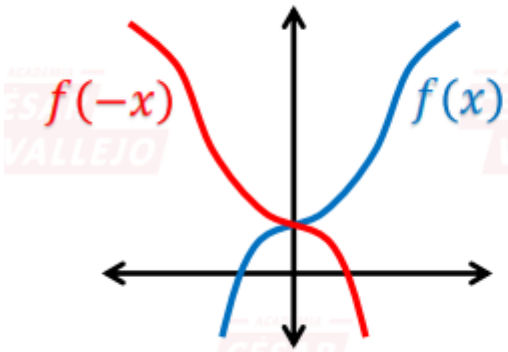


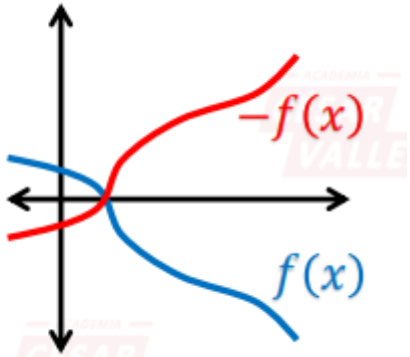
PROPIEDAD DE GRÁFICAS

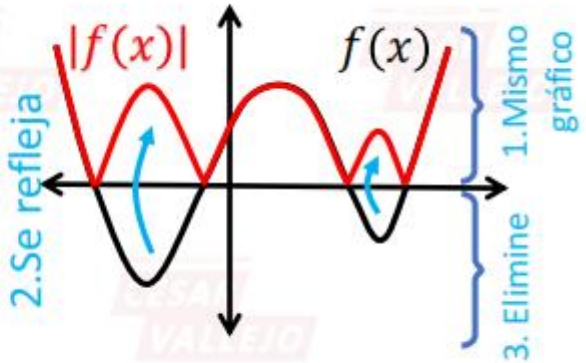




FUNCIONES







FUNCIÓN CRECIENTE

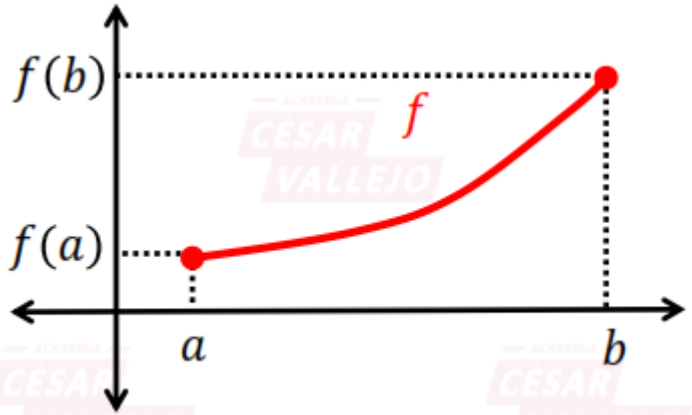
La función f es creciente en el intervalo I de su dominio si para todo par de números x_1 y x_2 de dicho intervalo se cumple

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Teorema:

Sea f una función continua y creciente.

Si Dom $f = [a; b]$ entonces Ran $f = [f(a); f(b)]$



FUNCIONES

FUNCIÓN DECRECIENTE

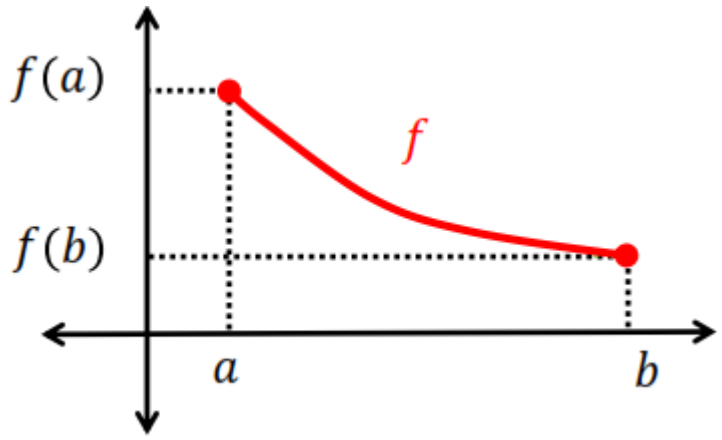
La función f es decreciente en el intervalo I de su dominio si para todo par de números x_1 y x_2 de dicho intervalo se cumple

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Teorema:

Sea f una función continua y decreciente.

Si Dom $f = [a; b]$ entonces Ran $f = [f(b); f(a)]$



ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Notación	Regla de correspondencia Dominio
$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ $Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$f.g$	$(f.g)(x) = f(x).g(x)$ $Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $Dom(f) \cap Dom(g) - \{x/g(x) = 0\}$
f^n	$f^n(x) = [f(x)]^n$ $Dom(f^n) = Domf$

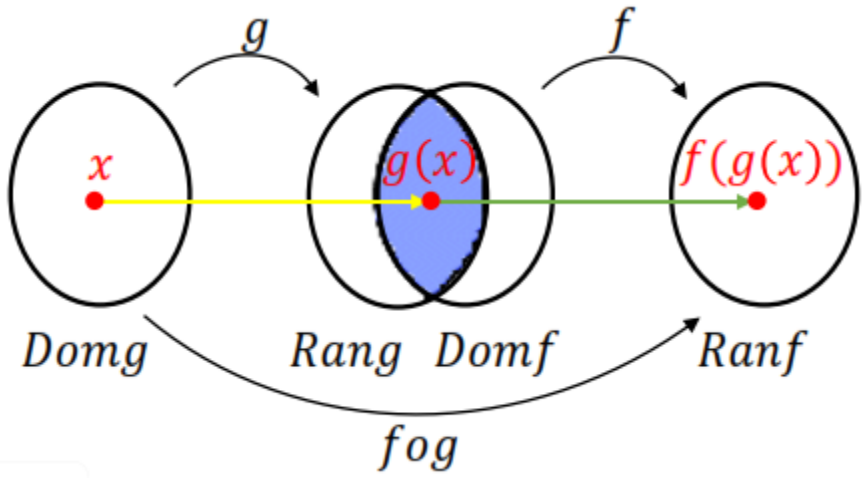
FUNCIONES

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean f y g son dos funciones, se denota y define su composición (f compuesta con g) por :

$$fog \begin{cases} Dom(fog) = \{x/x \in Dom\ g\ ;\ g(x) \in Domf\ \} \\ (fog)(x) \ = f(g(x)) \end{cases}$$

En forma gráfica, tenemos:



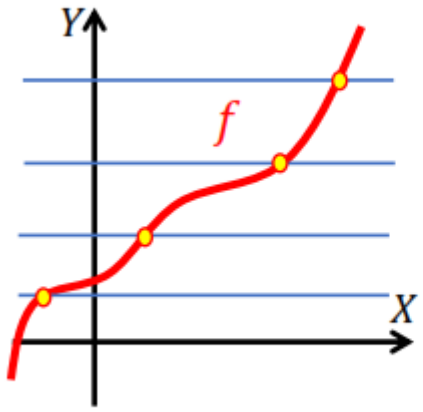
FUNCIÓN INVERSA

FUNCIÓN INYECTIVA

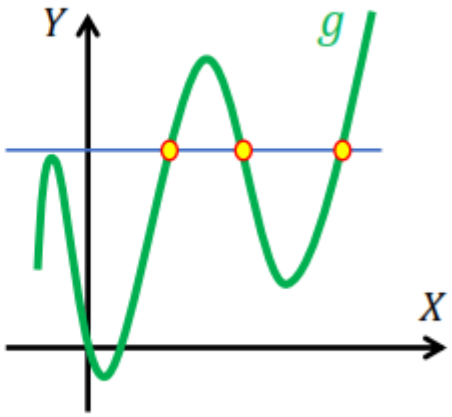
La f función es inyectiva, si todo elemento de su rango le corresponde un solo elemento del dominio, es decir:

$$Si\ f(a) = f(b) \ \rightarrow \ a = b\ ;\ a; b\ \in Domf$$

Observación:



f es inyectiva



g no es inyectiva

FUNCIONES

FUNCIÓN INVERSA

Sea $f = \{(x;y)/\ x \in Domf, y = f(x)\}$ una función inyectiva.

Se define la función inversa f^* (o también f^{-1}) como:

$$f^* = \{\ (y;x)\ /\ x \in Domf, y = f(x)\}$$

Cálculo de la función inversa (f^*)

Dado la función $y = f(x);\ x \in Domf$

1) Demostrar que f es inyectiva

2) Cálculo del $Domf^*$

Para ello, se calcula el rango de f, porque

$$Ranf = Domf^*$$

3) Cálculo del $y = f^*(x)$

Para ello:

- Se despeja x en función de y
- Se intercambia x con y

Con ello la función inversa queda definida

Propiedades:

1) $Domf^* = Ranf \quad \wedge \quad Ranf^* = Domf$

2) $f(x) = y \quad \rightarrow \quad x = f^*(y)$

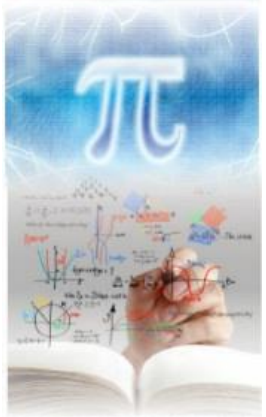
3) $(f^* of)(x) = x \quad ;\ x \in Domf$

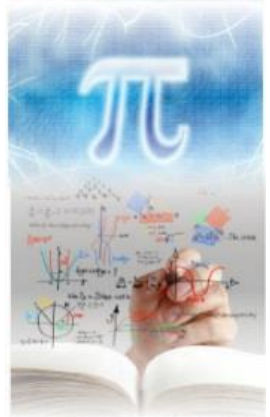
4) $(f of^*)(x) = x \quad ;\ x \in Domf^*$

5) $(f^*)^* = f$

6) La gráfica de f^* es simétrica a la gráfica de f respecto a la recta $y = x$

MOMENTO DE PRACTICAR





PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

FUNCIONES

1. Si el conjunto
$f=\{(3;9),(a;7),(3;a^2),(b;-1),(5;b^2),(5;4b-3)\}$
representa una función, indique f.

A) $f=\{(3;9),(3;-3),(-1;-1),(5;1)\}$
B) $f=\{(3;9),(5;9)\}$
C) $f=\{(3;9),(3;7),(5;25),(5;1)\}$
D) $f=\{(3;9),(-3;7),(5;-1)\}$
E) $f=\{(3;9),(-3;7),(1;-1),(5;1)\}$

SOLUCION

Por teorema:

$$a^2 = 9 \ \wedge b^2 = 4b - 3$$

a=-3 v a=3 ∧ b=3 v b=1

Pero a≠3 → a=-3 , además b≠ 3 → $b = 1$

Luego: f={(3;9),(-3;7),(1;-1),(5;1)}

2. Se sabe que f es una función, tal que

$$f_{(x)}=\begin{cases}2x-1; 0\le x<3\\ 2; 3\le x\le 10\end{cases}$$

además

$$f_{\left(\frac{m^2}{2}\right)}-f_{(2m+5)}=f_{(1)}; -1<m\le 2$$

calcule $f_{(m)}$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

SOLUCION

Del dato: $-1<m\le 2$.....(∝)

De (∝)

$$\rightarrow 0\le m^2\le 4\rightarrow 0\le \frac{m^2}{2}\le 2$$

Luego: $f(\frac{m^2}{2})=2\left(\frac{m^2}{2}\right)-1=m^2-1$

De (∝)

$-1<m\le 2\rightarrow -2<2m\le 4\rightarrow 3<2m+5\le 9$

Por dato: $f(\frac{m^2}{2})$ - f(2m+5) = f(1)

Luego: f(2m+5) = 2

$$m^2-1-2=2(1)-1\rightarrow m^2=4\rightarrow m=-2 \text{ v } m=2$$

Como : $-1<m\le 2\rightarrow m=2$

Se pide: f(m)= f(2)=2(2)-1= 3

3. Determine el dominio de la función

$$f_{(x)} = \sqrt{\frac{9}{x^2} - 1}$$

A) $[-3; 3]$
B) $[-3; 3] - \{0\}$
C) $\langle -\infty; -3] \cup [3; +\infty\rangle$
D) $[-2; 2]$
E) $[-2; 2] - \{0\}$

SOLUCION

Dom (f) = $\{x \in R / \frac{9}{x^2} - 1 \geq 0\}$

Luego: $\frac{9-x^2}{x^2} \geq 0$

Por (-1): $\frac{x^2-9}{x^2} \leq 0$

Luego: $x^2 \leq 9 \wedge x \neq 0$

$|x| \leq 3 \rightarrow -3 \leq x \leq 3 \wedge x \neq 0$

Finalmente: Dom(f) = [-3;3] - {0}

FUNCIONES

4. Sea la función

$h: \langle a; b\rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow 2x+5$

cuyo rango es $\langle 3; 9\rangle$. Determine el valor de $a+b$.

A) 0 B) 1 C) −1
D) −2 E) 2

SOLUCION

Por dato: h(x) = 2x+5

Además: 3<y<9

$3 < 2x+5 < 9$

$-2 < 2x < 4 \rightarrow -1 < x < 2$

$\rightarrow Dom(h) =< -1; 2 > =< a; b >$

Finalmente: a+b=1

5. Halle el rango de la función

$$g_{(x)} = \frac{x+1}{3x+2}; -\frac{1}{3} \leq x \leq 4$$

A) $\left\langle \frac{15}{42}; \frac{2}{3} \right\rangle$ B) $[2; 15]$ C) $\langle -1; -1/2 \rangle$

D) $\left[\frac{15}{42}; \frac{2}{3}\right]$ E) $\left[\frac{15}{42}; 2\right]$

SOLUCION

Del dato: $g(x) = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{3x+2})$

Por dato: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 4$

$\rightarrow -1 \leq 3x \leq 12$

$\rightarrow 1 \leq 3x + 2 \leq 14$

$\rightarrow \frac{1}{14} \leq \frac{1}{3x+2} \leq 1$

$\rightarrow \frac{15}{14} \leq 1 + \frac{1}{3x+2} \leq 2$

$\rightarrow \frac{15}{42} \leq \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{3x+2}) \leq \frac{2}{3}$

Finalmente: Ran(g) = $[\frac{15}{42}; \frac{2}{3}]$

FUNCIONES

6. Sea $f: S \to \mathbb{R}$ una función definida por $f=\{(2t+1; 4t^2-2t+1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}/t \in \mathbb{R}\}$
Halle la regla de correspondencia de f.

A) $f_{(x)}=x^2-x+1$
B) $f_{(x)}=x^2-2x+3$
C) $f_{(x)}=x^2+3x+3$
D) $f_{(x)}=x^2+3x-3$
E) $f_{(x)}=x^2-3x+3$

SOLUCION

Sea: $x = 2t+1 \to t=\frac{x-1}{2}$

Luego: $f(x)=4(\frac{x-1}{2})^2 - 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 - x + 1 + 1$

Finalmente: $f(x) = x^2 - 3x + 3$

FUNCIONES

7. Dado el conjunto $A=\{-2; 2; 3; 4\}$ y las funciones $f=A \to A$ y g, tales que $f=\{(2; 3), (a; 2), (3; 4), (4; -2)\}$ y $g_{(x)}=mx+n$. Además $f_{(2)}=g_{(3)}$ y $f_{(3)}=g_{(2)}$. Evalúe $g_{(a)}$.

A) -1 B) 3 C) 5
D) 8 E) 10

SOLUCION

Dom(f) ={-2;2;3;4} ={2;a;3;4}

$$\to a = -2$$

Dato: g(x) = mx+n

f(2) = g(3) ∧ f(3) = g(2)
3 = 3m + n 4 = 2m +n

Resolviendo: m=-1 y n= 6

Luego: g(x) = -x+6

Finalmente: g(a) = g(-2) = -(-2) + 6 = 8

FUNCIONES

8. Sea f una función, tal que

$$f_{(x)} = \begin{cases} x + f_{(1)}; x < 0 \\ x - f_{(0)}; x \geq 0 \end{cases}$$

calcule $\sum_{k=-5}^{5} f_{(k)}$

A) 0 B) 10 C) 5
D) −5 E) −1

SOLUCION

$f(0) = 0 - f(0) \rightarrow f(0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x + f(1); x < 0 \\ x; x \geq 0 \end{cases}$$

Además: $f(1) = 1$, luego: $f(x) = \begin{cases} x + 1; x < 0 \\ x; x \geq 0 \end{cases}$

Se pide: $\sum_{k=-5}^{5} f(k) = f(-5) + f(-4) + \cdots .. + f(4) + f(5)$

$$\sum_{k=-5}^{5} f(k) = (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Finalmente:

$$\sum_{k=-5}^{5} f(k) = 5$$

FUNCIONES

9. Se define la función

$$V_{(x)} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

determine $\dfrac{V_{(ab)}V_{(bc)}}{V_{(abc)}}$

Si $\dfrac{a}{c} < 0 \wedge \dfrac{ab}{c} < 0 \wedge \dfrac{b}{c} > 0$

A) a B) b C) $-c$
D) $-ab$ E) $-b$

SOLUCION

$$\frac{a}{c} < 0 \wedge \left(\frac{a}{c}\right) b < 0 \rightarrow b > 0$$

$$\frac{b}{c} > 0, pero\ b > 0 \rightarrow c > 0$$

$$\frac{a}{c} < 0 \rightarrow a < 0$$

Luego: V(ab) = -ab ; V(bc) = bc ; V(abc) = -abc

Reemplazando:

$$S = \frac{(-ab)(bc)}{-abc} = b$$

FUNCIONES

10. Halle el dominio de la función

$$f_{(x)} = \sqrt{|x-2|+|x-1|-\text{sen}x} - \frac{1}{\sqrt{5-x}}$$

A) $\mathbb{R}$ B) $\langle -\infty; 5\rangle$ C) $\langle 5; +\infty\rangle$
D) $\langle 0; 5\rangle$ E) $\mathbb{R}^-$

SOLUCION

Dom(f)={x/|x-2|+|x-1|-sen(x)$\geq 0 \wedge 5 - x > 0$}

|x-2|+|x-1|$\geq senx \quad \wedge x < 5$

siempre se cumple

$\rightarrow x \in R \quad \wedge \quad x < 5$

Finalmente: Dom(f)=<-∞; 5 >

FUNCIONES

11. Dada la función

$$f_{(x)}\begin{cases} x^2-3x+5 \; ; & -2\le x\le 1 \\ \dfrac{x-3}{x-2} \; ; & 1<x<2 \\ -2x+3 \; ; & x\ge 2 \end{cases}$$

Halle el Ran$f$.

A) $\mathbb{R}$
B) $\langle -\infty; 2\rangle \cup [3; +\infty\rangle$
C) $\langle -\infty; -1] \cup \langle 2; 3\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; -1] \cup \langle 2; 15]$
E) $\langle -\infty; -1] \cup \langle 2; +\infty\rangle$

SOLUCION

$$f_1(x) = x^2 - 3x + 5 \; ; \; -2 \le x \le 1$$

Analizando: $-2 < 0 \rightarrow f_1(-2) > f_1(0)$

15 5

$$\rightarrow f_1(x) \; es \; decreciente$$

Luego: $\text{Ran}(f_1(x)) = [f_1(1); \; f_1(-2)] = [3; 15]$

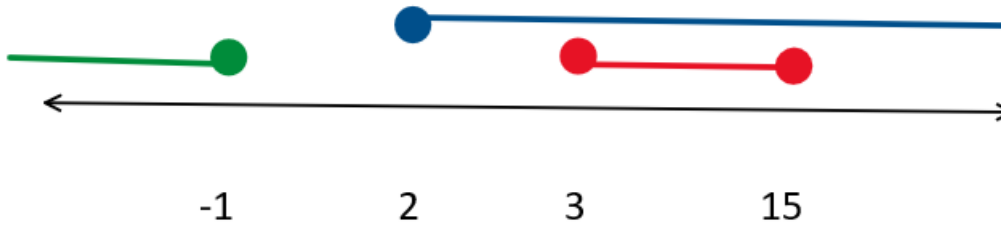
$$f_2(x) = \frac{x-3}{x-2}; \; 1 < x < 2$$

$$y_2 = 1 - \frac{1}{x-2}; \quad -1 < x-2 < 0$$

$$-1 > \frac{1}{x-2} \rightarrow 1 < -\frac{1}{x-2} \rightarrow 2 < 1 - \frac{1}{x-2} \rightarrow Ran(f_2(x) = < 2; +\infty >$$

$$f_3(x) = -2x + 3 \; ; x \ge 2 \rightarrow -2x \le -4 \rightarrow -2x + 3 \le -1$$

$$\rightarrow Ran(f_3(x)) = < -\infty; -1]$$



FUNCIONES

12. Si f es una función real de variable real, tal que

$$f_{(x)} = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$$

halle el rango de f.

A) $[-1; 1]$
B) $\mathbb{R}$
C) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$
D) $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$
E) $[-2; 2]$

Dom(f) = R

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1} \rightarrow yx^2 + y = x^2 + 2x - 1$$

$$(y-1)x^2 - 2x + (y+1) = 0\,; x \in R$$

Se cumple: $\Delta \geq 0$

$$(-2)^2 - 4(y-1)(y+1) \geq 0$$

$$4 \geq 4(y^2-1) \rightarrow y^2 \leq 2 \rightarrow |y| \leq \sqrt{2}$$

Por teorema: $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$

Finalmente: Ran(f)=$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

FUNCIONES

13. Sea la función $f: \langle 1; +\infty \rangle \to \mathbb{N}$, tal que $f_{(x)}$ es el número de primos menores o iguales a x.

Si $g_{(x)} = \dfrac{f_{(\sqrt{2})}x^2 + 3f_{(8)}}{x + f_{(f(f_{(23)}))}}$

entonces $f_{(g(4))}$ es igual a

A) 0 B) 1 C) 17/7
D) 13/15 E) 3

UNI 2003 - II

FUNCIONES

14 Sea $A=\{f/f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f_{(x)}=Kx; K\neq 0\}$
Si $f, g \in A$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $(f+g) \in A$
II. $(f-g) \in A$
III. $f(-x) \in A$
IV. $-g_{(x)} \in A$

A) VVVV B) FFFF C) VFVF
D) FFVV E) FVFV

15. Sea f una función, de modo que

$$f_{(x)}=\begin{cases}2x-f_{(x)} & ; \quad x\geq 1\\ xf_{(x)}-x^2+1; & x<0\end{cases}$$

determine f.

A) $f_{(x)}=x+1\ ;\ x\in\mathbb{R}$

B) $f_{(x)}=-x\ ;x\in\mathbb{R}$

C) $f_{(x)}=\begin{cases}x & ; \quad x\geq 1\\ x+1; & x<0\end{cases}$

D) $f_{(x)}=\begin{cases}-x & ; \quad x\geq 1\\ 1-x; & x<0\end{cases}$

E) $f_{(x)}=\begin{cases}x & ; \quad x<0\\ x+1; & x\geq 1\end{cases}$

FUNCIONES

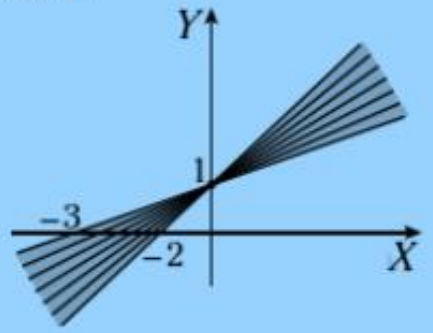
16. Halle el máximo valor de la función

$$f_{(x)} = \frac{x}{ax^2 + b}; a > 0; b > 0$$

A) $\sqrt{ab}$ B) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ C) $\frac{2}{\sqrt{ab}}$

D) $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ E) $2\sqrt{ab}$

17. Determine la característica común de todas las rectas que están en la región sombreada.



A) $y=\frac{1}{2}x+b,\ 0\le b\le 1$

B) $y=\frac{1}{3}x+b,\ 0\le b\le 1$

C) $y=mx+1,\ \frac{1}{3}\le m\le\frac{1}{2}$

D) $y=\frac{1}{2}x+b,\ \frac{1}{3}\le b\le\frac{1}{2}$

E) $y=mx+1,\ m\le\frac{1}{3}$

FUNCIONES

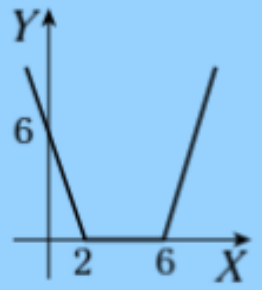
18. Determine la ecuación de la recta que pasa por los vértices de las gráficas de las funciones.

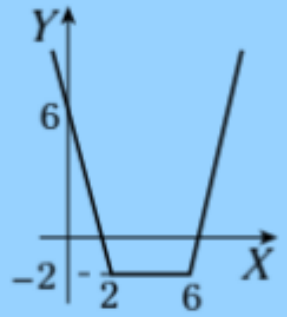
$f_{(x)}=x^2+4x+7$ y $g_{(x)}=-x^2+6x-10$

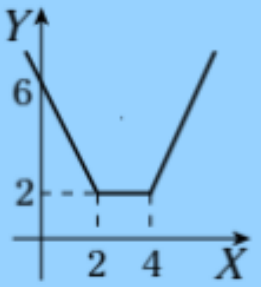
A) $4x+5y=23$
B) $5x+4y=7$
C) $3x+4y=5$
D) $4x+5y=7$
E) $4x+5y=-7$

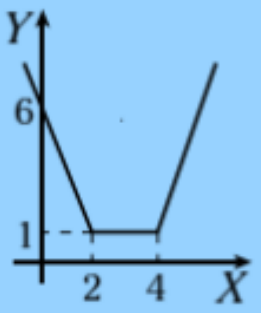
FUNCIONES

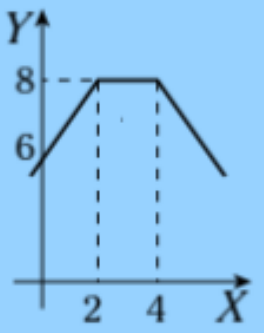
19. La gráfica de función f definida por $f_{(x)} = |x-2| + |x-4|$ es

A) 

B) 

C) 

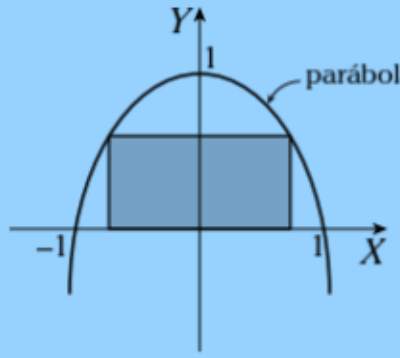
D) 

E) 

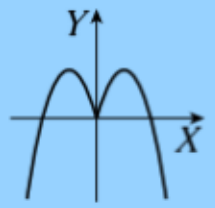
UNI 2001 - I

FUNCIONES

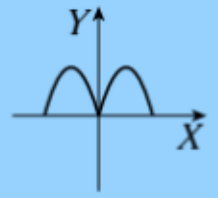
20. Halle la gráfica de la función que represente el área de la región sombreada que se muestra en la figura.



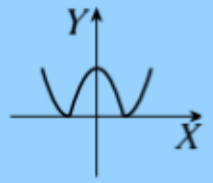
A)



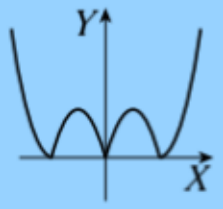
B)



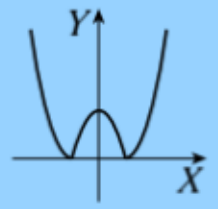
C)



D)



E)



FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS